

UN MODELO EN DIFERENCIAS CON RETARDO COMO
APROXIMACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DEL MODELO DE DERISO-SCHNUTE
(*DELAY DIFFERENCE MODEL*), PARA EL CASO EN QUE F Y M
SON CONSTANTES POR UNIDAD DE TIEMPO*

por

DANIEL R. HERNÁNDEZ

¹Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero (INIDEP),
Paseo Victoria Ocampo N° 1, Escollera Norte, B7602HSA - Mar del Plata, Argentina
correo electrónico: danielh@inidep.edu.ar

SUMMARY

A delay difference model as an approach to and simplification of the Deriso-Schnute model (Delay Difference Model) for the case when F and M are constant per time unit. The theoretical development of a delay difference model as an approach to and simplification of the Deriso-Schnute model for the case when natural and fishing mortality are constant per time unit and operate simultaneously along the year is presented. The model is derived from Pope's generalized cohort equation. In the model obtained, fishing mortality is expressed as total annual catches, which simplifies calculations by not having to solve Baranov's catch equation which is nonlinear with respect to F and that, to obtain the fishing mortality rates corresponding to a given catch level, has to be frequently solved during the process of parameter, projection and risk analysis estimation. In the model proposed, to obtain different fishing instantaneous mortality rates, the assumption of the Deriso-Schnute model that considers that they must be equal for all ages recruited is relaxed. Results are shown in an application example with whitemouth croaker (*Micropogonias furnieri*) data.

RESUMEN

Se presenta el desarrollo teórico de un modelo en diferencias con retardo como aproximación y simplificación del modelo de Deriso-Schnute (*Delay Difference Model*) para el caso en que la mortalidad natural y por pesca son constantes por unidad de tiempo y operan simultáneamente a lo largo del año. El modelo se deriva de la ecuación de cohortes generalizada de Pope. En el que se obtiene, la mortalidad por pesca se expresa en términos de capturas totales anuales, lo que simplifica los cálculos al no tener que resolver la ecuación de captura de Baranov, que es no lineal con respecto a F y que, para obtener las tasas de mortalidad por pesca correspondientes a un nivel de captura dado debe ser, con frecuencia, resuelta en el proceso de estimación de parámetros, proyecciones y análisis de riesgo. En el modelo que se propone, para lograr distintas tasas instantáneas de mortalidad por pesca, se relaja el supuesto del de Deriso-Schnute que considera que deben ser iguales para todas las edades reclutadas. Se muestran los resultados en un ejemplo de aplicación con datos de corvina rubia (*Micropogonias furnieri*).

Key words: Delay Difference Model, aggregated models, stock assessment.

Palabras clave: Modelo en Diferencias con Retardo, modelos agregados, evaluación de recursos.

INTRODUCCIÓN

La elección de un modelo de evaluación de un recurso está condicionada por el tipo de datos disponibles. Si no se tiene lectura de edades o de tallas, generalmente no será posible utilizar un modelo estructurado por edad o tamaño. De esta forma, generalmente se terminarán efectuando evaluaciones de los recursos con modelos de producción excedente, como por ejemplo, los modelos de Schaefer, Fox, Pella y Tomlinson, etc. (Hilborn y Walters, 1992). Estos modelos requieren sólo disponer de datos de un índice de abundancia (a partir de una captura por unidad de esfuerzo estandarizada, CPUE) y la serie de capturas totales anuales. Si bien son modelos simples y muy útiles, los mismos se basan en supuestos fuertes sobre la forma de expresar la producción excedente como función de la biomasa (el modelo de Schaefer, por ejemplo, asume que la producción excedente es una función cuadrática de la biomasa).

Deriso (1980) presentó un modelo agregado en diferencias con retardo que luego fue generalizado por Schnute (1985) y que se conoce en la actualidad como Modelo en Diferencias con Retardo (*Delay Difference Model*) de Deriso-Schnute. Este modelo se basa en una serie de supuestos simplificadores y se destaca debido a que el mismo puede derivarse naturalmente a partir de un modelo estructurado por edad del tipo de Beverton y Holt (Schnute, 1985). El mismo representa un puente entre modelos estructurados y los modelos globales, y es interesante observar al efectuar la derivación del modelo, como el retardo aparece naturalmente como una característica intrínseca del proceso de evolución en el tiempo de las biomásas en un recurso estructurado por edad. Además, a diferencia de los modelos

globales de producción excedente, en este modelo aparecen expresamente parámetros asociados al crecimiento en peso, la mortalidad natural, la mortalidad por pesca y el reclutamiento. De esta forma, todos los factores que pueden generar crecimiento o decrecimiento de las biomásas intervienen en el modelo en forma explícita.

En este trabajo se deriva un modelo en diferencias como aproximación y simplificación del modelo del tipo Deriso-Schnute, para el caso importante en el cual la mortalidad natural y la mortalidad por pesca son constantes por unidad de tiempo. La derivación del modelo se basa en considerar la ecuación de cohortes propuesta por Hernández y Perrota (2008) para representar la evolución de una cohorte, fórmula obtenida como generalización de la ecuación de cohortes de Pope (1972).

La ventaja del modelo propuesto es que el mismo no requiere la resolución de la ecuación de captura de Baranov para obtener las tasas instantáneas de mortalidad por pesca correspondientes a una captura dada, lo cual implica facilitar mucho los cálculos (la ecuación de Baranov es no-lineal con respecto a la tasa instantánea de mortalidad por pesca F y debe ser resuelta muchas veces en el proceso de estimación de parámetros, proyecciones y análisis de riesgo). Por otra parte, en principio, en el modelo propuesto en este trabajo las tasas de mortalidad por pesca por edad podrían ser distintas para cada edad reclutada, a diferencia de lo que ocurre en el modelo de Deriso-Schnute.

MATERIALES Y MÉTODOS

El modelo en diferencias con retardo de Deriso-Schnute se puede escribir en la forma (Hilborn y Walters, 1992):

$$B_t = (1 + \rho) s_{t-1} B_{t-1} - \rho s_{t-1} s_{t-2} B_{t-2} - \rho \Omega s_{t-1} R_{t-1}^w + R_t^w \quad (1)$$

siendo:

B_t, B_{t-1}, B_{t-2} : biomazas del *stock* explotado a comienzo de los años $t, t-1$ y $t-2$, respectivamente;

ρ : parámetro de crecimiento de la relación:

$$\bar{w}_a = \alpha + \rho \bar{w}_{a-1} \quad (2)$$

entre los pesos medios \bar{w}_a y \bar{w}_{a-1} , correspondientes a las edades a y $a-1$, respectivamente, siendo α la ordenada al origen de dicha relación;

s_{t-1}, s_{t-2} : sobrevivencias totales correspondientes a los años $t-1$ y $t-2$, respectivamente:

$$s_{t-1} = e^{-(M+F_{t-1})}, \quad s_{t-2} = e^{-(M+F_{t-2})} \quad (3)$$

siendo:

M : tasa instantánea de mortalidad natural;

R_t^w, R_{t-1}^w : reclutamientos en peso a la pesquería, correspondientes a los años t y $t-1$, respectivamente;

$$\Omega = \bar{w}_{k-1} / \bar{w}_k \quad (4)$$

siendo \bar{w}_{k-1} y \bar{w}_k los pesos medios a la edad $k-1$ y k , en donde k representa la edad de reclutamiento.

Derivación del modelo

Si consideramos que la dinámica del recurso estructurado por edad, bajo explotación, está dada por (Pope, 1972):

$$N_{a,t} = N_{a-1,t-1} e^{-(M+F_{a-1,t-1})} \quad (E1)$$

$$C_{a,t}^\# = N_{a,t} \frac{F_{a,t} (1 - e^{-(M+F_{a,t})})}{(M + F_{a,t})} \quad (E2)$$

siendo:

$N_{a,t}, N_{a-1,t-1}$: el número de individuos de edad a en el año t y edad $a-1$ en el año $t-1$, respectivamente;

$C_{a,t}^\#$: la captura en número de individuos de edad a en el año t ;

M : tasa instantánea de mortalidad natural;

$F_{a,t}$: tasa instantánea de mortalidad por pesca, para individuos de edad a en el año t .

De acuerdo con Hernández y Perrotta (2008, fórmula (9)) podemos escribir, en forma aproximada:

$$N_{a,t} = (N_{a-1,t-1} - \phi(M) C_{a-1,t-1}^\#) e^{-M} \quad (5)$$

siendo:

$C_{a-1,t-1}^\#$: la captura en número de individuos de edad $a-1$ en el año $t-1$;

$\phi(M) = 1 - a(1 - e^{bM/2})$ (con a y b definidos en Hernández y Perrotta (2008)).

Ahora bien, por definición, tenemos que la biomasa en peso del *stock* explotado en el año t está dada por:

$$B_t = \sum_{a=k}^{\infty} \bar{w}_a N_{a,t} = \sum_{a=k+1}^{\infty} \bar{w}_a N_{a,t} + R_t^w \quad (6)$$

Reemplazando (2) y (5) en el segundo miembro de (6) tenemos que:

$$B_t = \sum_{a=k+1}^{\infty} (\alpha + \rho \bar{w}_{a-1}) (N_{a-1,t-1} - \phi(M) C_{a-1,t-1}^\#) e^{-M} + R_t^w \quad (7)$$

Y distribuyendo los términos y agrupando convenientemente se obtiene:

$$B_t = \alpha e^{-M} N_{t-1} + \rho e^{-M} B_{t-1} - \Psi_{t-1} + R_t^w \quad (8)$$

siendo N_{t-1} el número total individuos en el año t y siendo además: $\Psi_{t-1} = \phi(M) e^{-M} (\alpha C_{t-1}^{\#} + \rho C_{t-1}^w)$, con $C_{t-1}^{\#}$ y C_{t-1}^w la captura total en el año t , en número de individuos y en peso, respectivamente.

Ahora bien, por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} N_t &= \sum_{a=k}^{\infty} N_{a,t} \\ &= \sum_{a=k+1}^{\infty} N_{a,t} + R_t^{\#} \end{aligned} \quad (9)$$

siendo $R_t^{\#}$ el reclutamiento en número de individuos en el año t .

Reemplazando en (9) $N_{a,t}$ por el segundo miembro de (5) y distribuyendo términos y agrupando, obtenemos:

$$N_t = e^{-M} N_{t-1} - \phi(M) e^{-M} C_{t-1}^{\#} + R_t^{\#} \quad (10)$$

De esta forma, teniendo en cuenta (10) se obtiene:

$$\alpha N_{t-1} = \alpha e^{-M} N_{t-2} - \alpha \phi(M) e^{-M} C_{t-2}^{\#} + \alpha R_{t-1}^{\#} \quad (11)$$

Ahora bien, según (8) tenemos que:

$$B_{t-1} = \alpha e^{-M} N_{t-2} + \rho e^{-M} B_{t-2} - \Psi_{t-2} + R_{t-1}^w \quad (12)$$

y entonces:

$$\alpha e^{-M} N_{t-2} = B_{t-1} - \rho e^{-M} B_{t-2} + \Psi_{t-2} - R_{t-1}^w \quad (13)$$

Y sustituyendo en (11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha N_{t-1} &= B_{t-1} - \rho e^{-M} B_{t-2} + \Psi_{t-2} - R_{t-1}^w \\ &\quad - \alpha \phi(M) e^{-M} C_{t-2}^{\#} + \alpha R_{t-1}^{\#} \end{aligned} \quad (14)$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \alpha e^{-M} N_{t-1} &= e^{-M} B_{t-1} - \rho e^{-2M} B_{t-2} + e^{-M} \Psi_{t-2} \\ &\quad - e^{-M} R_{t-1}^w - \alpha \phi(M) e^{-2M} C_{t-2}^{\#} \\ &\quad + \alpha e^{-M} R_{t-1}^{\#} \end{aligned} \quad (15)$$

y entonces, sustituyendo (15) en (8) y reordenando y cancelando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} B_t &= \left\{ (1 + \rho) e^{-M} B_{t-1} - \rho e^{-2M} B_{t-2} \right\} \\ &\quad + \left\{ \alpha e^{-M} R_{t-1}^{\#} - e^{-M} R_{t-1}^w + R_t^w \right\} \\ &\quad + \left\{ e^{-M} \Psi_{t-2} - \Psi_{t-1} - \alpha \phi(M) e^{-2M} C_{t-2}^{\#} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

El segundo término entre llaves, del segundo miembro de (16), puede simplificarse teniendo en cuenta que por definición:

$$R_{t-1}^w = \bar{w}_k R_{t-1}^{\#} \quad (17)$$

y que además se está considerando como válida la ecuación (2) y en particular que $\alpha - \bar{w}_k = \rho \bar{w}_{k-1}$, obteniendo entonces:

$$\alpha e^{-M} R_{t-1}^{\#} - e^{-M} R_{t-1}^w + R_t^w = R_t^w - e^{-M} \rho \Omega R_{t-1}^w \quad (18)$$

siendo $\Omega = \frac{\bar{w}_{k-1}}{\bar{w}_k}$.

A su vez, teniendo en cuenta también la ecuación (2) y en particular que $\alpha = \bar{w}_k - \rho \bar{w}_{k-1}$ y que además por definición se satisface que:

$$C_{t-1}^w = \bar{c}_{t-1}^w C_{t-1}^{\#} \quad (19)$$

(siendo \bar{c}_{t-1}^w el peso medio de la captura en el año $t-1$), se obtiene para el tercer término del segundo miembro de (16) que:

$$\begin{aligned} e^{-M} \Psi_{t-2} - \Psi_{t-1} - \alpha \phi(M) e^{-2M} C_{t-2}^{\#} &= \\ e^{-M} \phi(M) (e^{-M} \rho C_{t-2}^w - C_{t-1}^w \phi_{t-1} / \bar{c}_{t-1}^w) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{siendo } \varphi_{t-1} = \bar{w}_k + \rho (\bar{c}_{t-1}^w - \bar{w}_{k-1}) \quad (21)$$

Por último, teniendo en cuenta (15), (18) y (20), se obtiene:

$$\begin{aligned} B_t &= (1 + \rho) e^{-M} B_{t-1} - \rho e^{-2M} B_{t-2} \\ &\quad - \rho \Omega e^{-M} R_{t-1}^w + R_t^w \\ &\quad + e^{-M} \phi(M) [e^{-M} \rho C_{t-2}^w - C_{t-1}^w \varphi_{t-1} / \bar{c}_{t-1}^w] \quad (22) \end{aligned}$$

La fórmula (22) define un modelo de dinámica de biomasa con retardo. En éste modelo el crecimiento en peso (parámetro ρ) y el reclutamiento, como factores que permiten el incremento de la biomasa y por otra parte la mortalidad natural (parámetro M) y la mortalidad por pesca (expresada en términos de las capturas), como factores que generan disminución de la biomasa, aparecen en el modelo en forma explícita, de la misma forma que lo hacían en el modelo (1) de Deriso-Schnute, exceptuando las capturas.

Observar que la parte superior del segundo miembro de (22) coincide con el modelo (1) de Deriso-Schnute (con $F_{t-1} = F_{t-2} = 0$) y a esta primera parte del modelo se suma el término que figura en la parte inferior del segundo miembro de (22), dependiente de las capturas, la tasa de mortalidad natural M y el parámetro de crecimiento ρ .

Teniendo en cuenta que a ρ , M y Ω los consideramos parámetros conocidos y sin error, a los efectos de simplificar la notación, definimos:

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 + \rho) e^{-M} \\ A_2 &= \rho e^{-2M} \\ A_3 &= \rho \Omega e^{-M} \quad (23) \end{aligned}$$

Y entonces el modelo (22) lo podemos escribir en la forma simplificada:

$$\begin{aligned} B_t &= A_1 B_{t-1} - A_2 B_{t-2} - A_3 R_{t-1}^w + R_t^w \\ &\quad + e^{-M} \phi(M) [e^{-M} \rho C_{t-2}^w - C_{t-1}^w \varphi_{t-1} / \bar{c}_{t-1}^w] \quad (24) \end{aligned}$$

Reclutamiento

A los efectos de expresar el reclutamiento en peso en función de la biomasa pretérita del *stock* explotado, consideramos la función generalizada de reclutamiento de Schnute (1985) dada por:

$$R_t^w = \bar{w}_k f(B_{t-k}) = \bar{w}_k \alpha_0 B_{t-k} (1 - \beta \gamma B_{t-k})^{1/\gamma} \quad (25)$$

siendo α_0 , β y γ parámetros del modelo.

El modelo (25) tiene como casos particulares importantes:

$$\gamma = -1: f(B_{t-k}) = \alpha_0 B_{t-k} / (1 + \beta B_{t-k}) \quad \text{Beverton y Holt (1957)}$$

$$\gamma = 0: f(B_{t-k}) = \alpha_0 B_{t-k} e^{-\beta B_{t-k}} \quad \text{Ricker (1954, 1958)}$$

$$\gamma = 1: f(B_{t-k}) = \alpha_0 B_{t-k} (1 - \beta B_{t-k}) \quad \text{Schaefer (1954)}$$

para más detalles ver Schnute (1985).

Para considerar el caso en el cual no exista dependencia funcional del reclutamiento con una biomasa pretérita, consideramos también la relación propuesta por Schnute (1994):

$$R_t^w = R_{t-1}^w + \varepsilon_t \quad (26)$$

con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ independientes entre tiempos t , t' con $t \neq t'$.

En (26) el reclutamiento cada año se asume que se desvía aleatoriamente del reclutamiento del año anterior. Esto permite a la población la deriva a altos o bajos valores de biomasa sobre largos períodos (Schnute, 1994). Observar que la relación (26) tiene como caso particular el de reclutamiento constante, cuando $\sigma_\varepsilon = 0$.

Biomasa en equilibrio en ausencia de explotación

Si en el modelo (24) definimos las capturas nulas, obtenemos la siguiente ecuación que representa la dinámica del *stock* (para las edades mayores o iguales a k) en ausencia de explotación:

$$B_t = A_1 B_{t-1} - A_2 B_{t-2} - A_3 R_{t-1}^w + R_t^w \quad (27)$$

Si planteamos ahora la ecuación en equilibrio, tenemos que:

$$B_e = A_1 B_e - A_2 B_e + (1 - A_3) R_e^w \quad (28)$$

Si en (28) reemplazamos R_e^w teniendo en cuenta la ecuación generalizada de reclutamiento de Schnute (25) y despejamos B_e (dejando de lado la solución trivial $B_e = 0$), obtenemos la biomasa en equilibrio en ausencia de explotación, a partir de:

$$B_{virg} = (1 - (\tau / \alpha_0 \bar{w}_k)^\gamma) / (\beta \gamma) \quad \text{para } \gamma \neq 0$$

y

$$B_{virg} = \ln(\alpha_0 \bar{w}_k / \tau)^{1/\beta} \quad \text{para } \gamma = 0 \quad (29)$$

$$\text{siendo } \tau = (1 - A_3) / (1 - A_1 + A_2) \quad (30)$$

Si consideramos ahora el cálculo de la biomasa en equilibrio cuando la ecuación de reclutamiento es la (26), definiendo nuevamente las capturas nulas, tenemos en principio:

$$B_t = R_0^w (1 - A_3) + A_1 B_{t-1} - A_2 B_{t-2} + (1 - A_3) \sum_{s=1}^{t-1} \varepsilon_s + \varepsilon_t \quad (31)$$

siendo R_0^w el valor del reclutamiento en peso (desconocido pero fijo) en el tiempo $t = 0$.

En el modelo (31) aparece en forma explícita un error de proceso como consecuencia de la impredecibilidad del reclutamiento. De esta

forma las trayectorias de biomasa dadas por (31) no pueden determinarse *a priori*. No obstante, para cada valor de t se puede considerar la biomasa media correspondiente a la distribución de valores de biomasa posibles para cada año.

De esta forma, tomando valores esperados en el modelo (31), teniendo en cuenta los supuestos sobre ε y planteando la ecuación en equilibrio en términos de las biomasa esperadas, tenemos:

$$E(B)_e = R_0^w (1 - A_3) + A_1 E(B)_e - A_2 E(B)_e \quad (32)$$

Despejando de la ecuación (32) la biomasa esperada en equilibrio en ausencia de explotación, tenemos:

$$E(B)_{virg} = R_0^w \tau \quad (33)$$

La condición suficiente para que no haya indeterminaciones matemáticas en (29) y (33) es $e^{-M} \rho < 1$. Se puede demostrar que si se satisface esta condición entonces $0 < 1 - A_3 < 1$ y $0 < 1 - A_1 + A_2 < 1$ y de esta forma (30) está bien definido y por lo tanto también (29) y (33).

Si en particular $\rho < 1$ entonces se cumple que $e^{-M} \rho < 1$. El parámetro ρ es típicamente una fracción, con $0 < \rho < 1$, no obstante es posible que puedan darse valores de $\rho \geq 1$ (Schnute, 1994). En el caso particular en que la relación peso-edad pueda expresarse a partir de una función del tipo von Bertalanffy, con $w_a = w_\infty (1 - e^{-k(a-a_0)})$, entonces se satisface la relación (2) y $\rho = e^{-k} < 1$.

Debe observarse que, bajo la ausencia de explotación, el modelo (1) de Deriso-Schnute y el modelo (22) desarrollado en este trabajo, coinciden. Esto determina que la biomasa en equilibrio y la biomasa esperada en equilibrio, bajo ausencia de explotación, dadas por (29) y (33), también coincidan.

Biomasa en equilibrio bajo explotación con reclutamiento constante

En lo que sigue consideraremos el supuesto del

modelo (1) de Deriso-Schnute que las tasas instantáneas de pesca son las mismas para todas las edades reclutadas, esto es, $F_{a,t} = F_{k,t}$ para todo $a \geq k$. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación de captura en unidades de biomasa, correspondiente al caso considerado en este trabajo (mortalidad natural y por pesca actuando simultáneamente a lo largo del año), para una tasa instantánea de pesca F , se expresa en la forma:

$$C_t^w(F) = \lambda(F) B_t \quad (34)$$

siendo $C_t^w(F)$ la captura total en peso durante el año t , correspondiente a una tasa instantánea de pesca F y además:

$$\lambda(F) = \frac{F}{M+F} (1 - e^{-(M+F)}) \quad (35)$$

Si ahora consideramos el modelo (24) y estipulamos una tasa de pesca F y definimos un reclutamiento constante, R_c^w queremos determinar cual es la biomasa en equilibrio correspondiente a esta tasa. Para ello reemplazamos (34) en (24) y así obtenemos:

$$B_t = A_1 B_{t-1} - A_2 B_{t-2} + (1 - A_3) R_c^w + \lambda(F) e^{-M} \phi(M) [e^{-M} \rho B_{t-2} - B_{t-1} \varphi_{t-1} / \bar{c}_{t-1}^w] \quad (36)$$

Si planteamos ahora la ecuación en equilibrio, tenemos que:

$$B_e^F = A_1 B_e^F - A_2 B_e^F + (1 - A_3) R_c^w + \lambda(F) B_e^F e^{-M} \phi(M) [e^{-M} \rho - \varphi_e^F / \bar{c}_e^w(F)] \quad (37)$$

donde con B_e^F indicamos la biomasa en equilibrio correspondiente a una tasa instantánea de mortalidad por pesca F y φ_e^F se obtiene de (21) sustituyendo \bar{c}_{t-1}^w por $\bar{c}_e^w(F)$ que, teniendo en cuenta (34), está dado por:

$$\bar{c}_e^w(F) = \frac{B_e^F}{N_e^F} \quad (38)$$

De esta forma, reemplazando (38) en (37) y operando algebraicamente, se obtiene que:

$$B_e^F = \frac{[(1 - A_3) R_c^w - \lambda(F) e^{-M} \phi(M) (\bar{w}_k - \rho \bar{w}_{k-1}) N_e^F]}{[1 - A_1 + A_2 + \lambda(F) e^{-M} \phi(M) \rho (1 - e^{-M})]} \quad (39)$$

Por otra parte, a partir de (10), planteando la ecuación en equilibrio y despejando N_e^F , obtenemos:

$$N_e^F = \frac{R_c^w}{\bar{w}_k (1 - e^{-M} + \phi(M) e^{-M} \lambda(F))} \quad (40)$$

La correspondiente captura en equilibrio está dada, de acuerdo con (34), por:

$$C_e^w(F) = \lambda(F) B_e^F \quad (41)$$

Teniendo en cuenta (41), por definición, el rendimiento máximo sostenible, RMS , estará dado por:

$$RMS = \max_F \{ \lambda(F) B_e^F \} \quad (42)$$

en la medida que exista el máximo indicado en el miembro izquierdo de la ecuación (42). El valor de la tasa instantánea de mortalidad por pesca, F y el valor de biomasa que permiten alcanzar el RMS , se denotan F_{RMS} y $B_{RMS} = \lambda(F_{RMS}) B_e^{F_{RMS}}$, respectivamente.

Con respecto al modelo de Deriso-Schnute, se puede ver fácilmente que la biomasa en equilibrio correspondiente a una tasa instantánea de mortalidad por pesca F y reclutamiento constante R_c^w , se calcula a partir de:

$$B_e^F = \frac{R_c^w (1 - \rho \Omega s_F)}{(1 - (1 + \rho) s_F + \rho s_F^2)} \quad (43)$$

siendo $s_F = e^{-(M+F)}$.

Ejemplo de aplicación

A los efectos de ejemplificación se han calculado las capturas en equilibrio, bajo explotación, con reclutamiento constante, considerando parámetros biológicos correspondientes a la corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) y los parámetros a y b de la función $\phi(M) = 1 - a(1 - e^{bM/2})$, con a y b correspondientes al dominio definido por las condiciones $M \leq 0,5$ y $F_{a,t} \leq 1,5$, siendo $F_{a,t}$ la tasa instantánea de mortalidad por pesca, correspondiente a la edad a , en el año t (Hernández y Perrotta, 2008) (Tabla 1).

En la Figura 1 se presentan las capturas en equilibrio, bajo explotación y reclutamiento constante, calculadas a partir del modelo de Deriso-Schnute (*Delay Difference Model*) y el modelo

presentado en este trabajo (*Delay Difference Model* modificado), para reclutamientos constante de 30.000, 60.000, 90.000 y 100.000 t.

Como se puede observar, las curvas de captura en equilibrio en función de la tasa instantánea de mortalidad por pesca, F , son prácticamente iguales para los dos modelos considerados. De esta forma, teniendo en cuenta que las capturas en equilibrio se definen en términos de las biomazas en equilibrio, a partir de la relación $C_e^w(F) = \lambda(F) B_e^F$, y el parámetro $\lambda(F)$ es el mismo para los dos modelos considerados, se deduce que las biomazas en equilibrio, para cada F dado, son también muy similares para los dos modelos. Y lo mismo ocurre, en particular, con los rendimientos máximos sostenibles.

CONCLUSIONES

El modelo en diferencias con retardo propuesto en este trabajo es un modelo que, como el modelo de Deriso-Schnute, incluye componentes explícitas (convenientemente parametrizadas) de los factores que determinan incrementos (crecimiento en peso, reclutamiento) o decrementos (mortalidad por pesca, capturas) en la biomasa de una población explotada. El reclutamiento, en particular, en la medida que se tenga algún tipo de conocimiento al respecto, puede ser modelado en forma detallada, a diferencia de otros modelos de dinámica de biomasa en donde el reclutamiento no aparece en forma explícita en las ecuaciones que describen los modelos.

En la forma en que fue derivado, el modelo considera capturas totales en lugar de tasas de mortalidad por pesca, a diferencia de lo que hace el modelo de Deriso-Schnute. Esto lleva a que no sea necesario resolver la ecuación de captura de Baranov, que es una ecuación no lineal con respecto a F , para obtener las tasas instantáneas de mortalidad por pesca correspondientes a una captura dada. Esto disminuye mucho la cantidad de

Tabla 1. Parámetros biológicos y parámetros a y b de la función $\phi(M) = 1 - a(1 - e^{bM/2})$ para corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) utilizados para calcular las capturas en equilibrio bajo explotación con reclutamiento constante.

Table 1. Biological parameters and a and b parameters of the $\phi(M) = 1 - a(1 - e^{bM/2})$ function for white-mouth croaker (*Micropogonias furnieri*) used to calculate catches in equilibrium under exploitation with constant recruitment.

Parámetro	Valor
M^1	0,22
ρ^1	0,8984
w_{k-1}^2	0,0001471 t
w_k^2	0,0002696 t
a^3	1,869537
b^3	0,0469899
$\phi(M)^3$	1,0992

¹Tomado de Carozza y Hernández (2013).

²Carozza (comp. pers.). Claudia Carozza, Programa "Pesquerías de Peces Demersales Costeros", INIDER, P. V. Ocampo N° 1, B7602HSA - Mar del Plata, Argentina.

³Tomado de Hernández y Perrotta (2008).

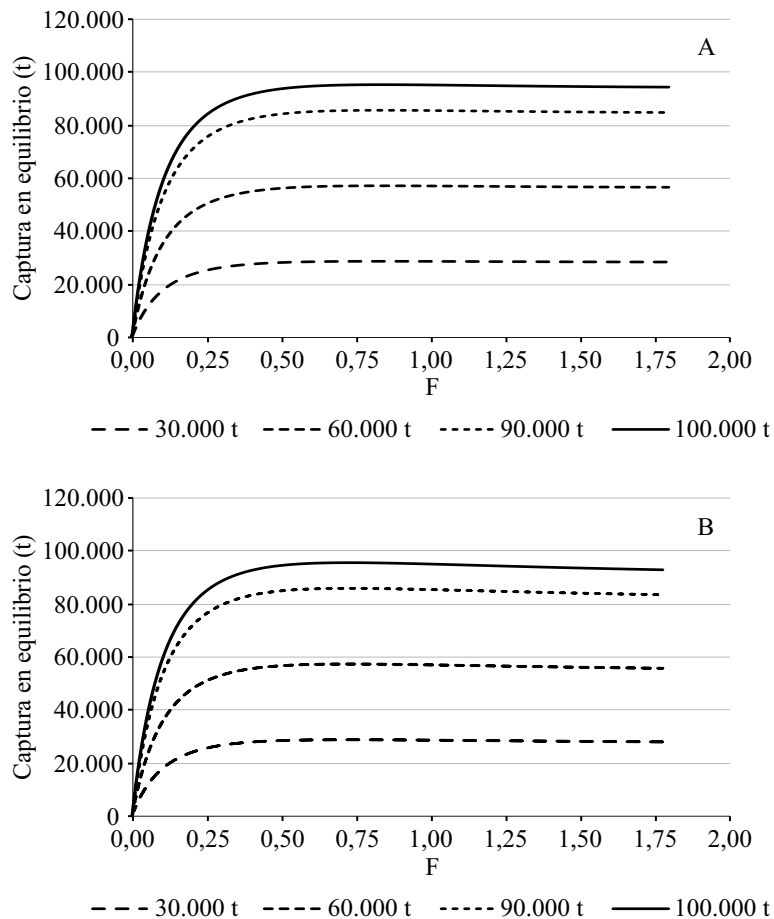


Figura 1. Capturas en equilibrio bajo explotación con reclutamiento constante. A) *Delay Difference Model* –modelo (1). B) *Delay Difference Model* modificado –modelo (22). Ejemplo aplicado a corvina rubia (*Micropogonias furnieri*). F: tasa instantánea de mortalidad por pesca.

Figure 1. Catches in equilibrium under exploitation with constant recruitment. A) *Delay Difference Model* –model (1). B) *Modified Delay Difference Model* –model (22). Example applied to whitemouth croaker (*Micropogonias furnieri*). F: fishing instantaneous mortality rate.

cálculos a efectuar si se quiere hacer un análisis de riesgo y expresar el riesgo en función de capturas hipotéticas o se necesita efectuar proyecciones de biomasa para una captura fija dada. En el caso de realizar la estimación de parámetros en un contexto bayesiano, el cual resulta muy apropiado para efectuar proyecciones y análisis de riesgo y ofrece una alternativa muy rica e interesante para la estimación de parámetros en sí mismo, el ahorro en cálculos es muy significativo.

En la derivación del modelo se puede apreciar

que el supuesto de que las tasas instantáneas de mortalidad por pesca sean las mismas para todas las edades reclutadas, que es un supuesto del modelo de Deriso-Schnute, no es necesario, dando el modelo propuesto la posibilidad de que sean distintas.

Por último, hay que destacar que el hecho de que la tasa de mortalidad natural M y el coeficiente de crecimiento ρ aparezcan en forma explícita en el modelo, ofrece la posibilidad de efectuar análisis de sensibilidad sobre estos parámetros, enriqueciendo los resultados.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Dra. Claudia Carozza del Programa "Pesquerías de Peces Demersales Costeros" del Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero (INIDEP), por haberme facilitado, gentilmente, información sobre la corvina rubia, lo cual permitió desarrollar el ejemplo de aplicación.

BIBLIOGRAFÍA

- BEVERTON, R.J.H. & HOLT, S.J. 1957. On the dynamics of exploited fish population. U.K. Minist. Agric. Fish. Food Fish. Invest., (2) 19, 533 pp.
- CAROZZA, C. & HERNÁNDEZ, D.R. 2013. Evaluación de corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) para el año 2013 mediante la aplicación del modelo en diferencias con retardo (*delay difference model*). Inf. Invest. INIDEP N° 89/2013, 16 pp.
- DERISO, R.B. 1980. Harvesting strategies and parameter estimation for an age-structured model. Can. J. Fish. Aquat. Sci., 37: 268-282.
- HERNÁNDEZ, D.R. & PERROTTA, R.G. 2008. Modificación del Análisis de Cohortes de Pope para extender su aplicación a un rango más amplio de valores de mortalidad natural y mortalidad por pesca. Rev. Invest. Desarr. Pesq., 19: 23-36.
- HILBORN, R. & WALTERS, C.J. 1992. Quantitative fisheries stock assessment: choice, dynamics and uncertainty. Chapman & Hall, Nueva York, 570 pp.
- POPE, J.G. 1972. An Investigation of the Accuracy of Virtual Population Analysis Using Cohort Analysis. ICNAF Res. Bull., 9: 65-74.
- RICKER, W.E. 1954. Stock and recruitment. J. Fish. Res. Board Can., 11: 559-623.
- RICKER, W.E. 1958. Handbook of computations for biological statistics of fish populations. Bull. Fish. Res. Board. Can., 119: 300 pp.
- SCHAEFER, M.B. 1954. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of commercial marine fisheries. Inter-Am. Trop. Tuna Comm. Bull., 1: 25-56.
- SCHNUTE, J.T. 1985. A General Theory for Analysis of Catch and Effort Data. Can. J. Aquat. Sci., 42: 414-429.
- SCHNUTE, J.T. 1994. A general framework for developing sequential fisheries models. Can. J. Fish. Aquat. Sci., 51: 1676-1688.

Recibido: 19-02-2015

Aceptado: 02-10-2015